ペル方程式の無理数解について

２００９年5月２１日
北海道岩見沢農業高校
加藤秀隆

０．はじめに

平方数以外の自然数の平方根に成り立つペル方程式の解を無理数解に拡張することができ、その解の中に有意義な解が存在し、その解により最小の自然数解を得ることができることを報告します。

１．ペル方程式について

x, y を自然数としたとき、平方数以外の自然数 D についての不定方程式

「$x^2 - y^2 D = \pm 1$」

が、通称「ペル方程式」と呼ばれています。最小な自然数解の組（単数）が得られると、それにより一般解を作ることができ平方根 $\sqrt{D}$ の最良な近似分数群を構成し高速小数展開をすることができます。関数電卓の表示を越えていきます。

$\left(x + y\sqrt{D}\right)^n$　　n を任意に設定してください。

x を分子数、y を分母数として割り算をするとよいです。例を示すと、

$\sqrt{2} \to 1 + \sqrt{2}$　　$1^2 - 1^2 \bullet 2 = 1 - 2 = -1$

n を２の累乗にします。

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2} \to \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^4 = 17 + 12\sqrt{2} \to \frac{17}{12} = 1.414666\bullet\bullet\bullet$$

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^8 = 577 + 408\sqrt{2} \to \frac{577}{408} = 1.41421\bullet\bullet\bullet$$

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^{16} = 665857 + 470832\sqrt{2} \to \frac{665857}{470832} = 1.41421356237\bullet\bullet\bullet$$

関数電卓の計算表示を越えていきます。

２．ペル方程式の無理数解への拡張

正則連分数成分の循環節の長さが 1 の場合は、第 1 項の正則連分数が単数です。長さが 2 以上のときは、1 サイクルの丁度半分（ハーフ）の位置にある正則連分数から単数を作ることができます。長さが偶数の場合は、ハーフの位置にある正則連分数が単数もどきになります。長さが奇数であっても偶数であってもハーフの位置を挟む 2 つの項から単数を作る

ことができます。循環節の長さが 4,5 の平方根の代表$\sqrt{7},\sqrt{13}$ について記述します。

・$\sqrt{7}$ の正則連分数は、順に、

$2+\sqrt{7}$　　$2^2-1^2\cdot 7=4-7=-3$

$3+\sqrt{7}$　　$3^2-1^2\cdot 7=9-7=2$

$5+2\sqrt{7}$　　$5^2-2^2\cdot 7=25-28=-3$

$8+3\sqrt{7}$　　$8^2-3^2\cdot 7=64-63=1$

$8+3\sqrt{7}$ がペル方程式の解であり、単数と呼ばれています。登場した数を次のように計算すると、

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot 7=\frac{4-7}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot 7=\frac{9-7}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot 7=\frac{25-28}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

$\dfrac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{3}},\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}},\dfrac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ もペル方程式の解（無理数解）です。取り敢えず「**単数もどき**」と呼ぶことにします。すべての平方根の正則連分数をこのように単数もどきにすることができます。

$$\left(\frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{16+6\sqrt{7}}{2}=8+3\sqrt{7}$$

累乗（2 乗、平方）により、単数を得たことになるので、$\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ を「**基本単数もどき**」と呼ぶことにします。また、このときの単数を、

$$\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{24+9\sqrt{7}}{3}=8+3\sqrt{7}$$

により得ることもできます。

・$\sqrt{13}$ では、どうなるでしょうか。

$3+\sqrt{13}$　　$3^2-1^2\cdot 13=9-13=-4$

$4+\sqrt{13}$　　$4^2-1^2\cdot 13=16-13=3$

$7+2\sqrt{13}$　　$7^2-2^2\cdot 13=49-52=-3$

$11+3\sqrt{13}$　　$11^2-3^2\cdot 13=121-117=4$

$18+5\sqrt{13}$　　$18^2-5^2 \cdot 13=324-325=-1$

ここでの単数は、$18+5\sqrt{13}$ です。

$$\frac{4+\sqrt{13}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{7+2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}=\frac{54+15\sqrt{13}}{3}=18+5\sqrt{13}$$

$$\frac{3+\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{11+3\sqrt{13}}{2}=\frac{72+20\sqrt{13}}{4}=18+5\sqrt{13}$$

有理数解の基本単数が登場します。

$$\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3=\frac{144+40\sqrt{13}}{8}=18+5\sqrt{13}$$

３．基本単数、基本単数もどき

$\sqrt{99}$ までを順に記述します。

$\sqrt{3} \to \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{6} \to \dfrac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{7} \to \dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{8} \to \dfrac{2+\sqrt{8}}{2}=1+\sqrt{2}$

$\sqrt{11} \to \dfrac{3+\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{12} \to \dfrac{3+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$　　$\sqrt{13} \to \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

$\sqrt{14} \to \dfrac{4+\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{15} \to \dfrac{3+\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$　　$\sqrt{18} \to \dfrac{4+\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

$\sqrt{19} \to \dfrac{13+3\sqrt{19}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{20} \to \dfrac{4+\sqrt{20}}{2}=2+\sqrt{5}$　　$\sqrt{21} \to \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$

$\sqrt{21} \to \dfrac{9+2\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$　　$\sqrt{22} \to \dfrac{14+3\sqrt{22}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{23} \to \dfrac{5+\sqrt{23}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{24} \to \dfrac{4+\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$　　$\sqrt{27} \to \dfrac{5+\sqrt{27}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{28} \to \dfrac{16+3\sqrt{28}}{2}=8+3\sqrt{7}$　　$\sqrt{29} \to \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$

$\sqrt{30} \to \dfrac{5+\sqrt{30}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}+\sqrt{6}$　　$\sqrt{31} \to \dfrac{39+7\sqrt{31}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{32} \to \dfrac{6+\sqrt{32}}{2}=3+2\sqrt{2}$　　$\sqrt{33} \to \dfrac{6+\sqrt{33}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+\sqrt{11}$

$\sqrt{34} \to \dfrac{6+\sqrt{34}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}+\sqrt{17}$　　$\sqrt{35} \to \dfrac{5+\sqrt{35}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{38} \to \dfrac{6+\sqrt{38}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}+\sqrt{19}$　　$\sqrt{39} \to \dfrac{6+\sqrt{39}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+\sqrt{13}$

$$\sqrt{40} \to \frac{6+\sqrt{40}}{2} = 3+\sqrt{10}$$

$\sqrt{41}$ は、循環節の長さが 3 なので第 1,2 項により、

$$\sqrt{41} \to \left(\frac{6+\sqrt{41}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{13+2\sqrt{41}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{160+25\sqrt{41}}{5} = 32+5\sqrt{41}$$ です。

$$\sqrt{42} \to \frac{6+\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}+\sqrt{7} \qquad \sqrt{43} \to \frac{59+9\sqrt{43}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{44} \to \frac{20+3\sqrt{44}}{2} = 10+3\sqrt{11}$$

$\sqrt{44}$ には、「クォーター」と呼べるものがあります。第 1 項です。

$$\left(\frac{6+\sqrt{44}}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{80+12\sqrt{44}}{8} = \frac{20+3\sqrt{44}}{2}$$

$$\sqrt{45} \to \frac{7+\sqrt{45}}{2} \qquad \sqrt{46} \to \frac{156+23\sqrt{46}}{\sqrt{2}} = 78\sqrt{2}+23\sqrt{23}$$

$$\sqrt{47} \to \frac{7+\sqrt{47}}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{48} \to \frac{6+\sqrt{48}}{\sqrt{12}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{51} \to \frac{7+\sqrt{51}}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{52} \to \frac{36+5\sqrt{52}}{2} = 18+5\sqrt{13}$$

$\sqrt{53}$ は、循環節の長さが 5 なので第 2,3 項により、

$$\sqrt{53} \to \left(\frac{22+3\sqrt{53}}{\sqrt{7}}\right)\left(\frac{29+4\sqrt{53}}{\sqrt{7}}\right) = \frac{1274+175\sqrt{53}}{7} = 182+25\sqrt{53}$$ です。

$$\sqrt{54} \to \frac{22+3\sqrt{54}}{\sqrt{2}} = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3} \qquad \sqrt{55} \to \frac{15+2\sqrt{55}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}+2\sqrt{11}$$

$$\sqrt{56} \to \frac{7+\sqrt{56}}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}+2\sqrt{2} \qquad \sqrt{57} \to \frac{15+2\sqrt{57}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}+2\sqrt{19}$$

$\sqrt{58}$ は、循環節の長さが 7 なので第 3,4 項により、

$$\sqrt{58} \to \left(\frac{15+2\sqrt{58}}{\sqrt{7}}\right)\left(\frac{23+3\sqrt{58}}{\sqrt{7}}\right) = \frac{693+91\sqrt{58}}{7} = 99+13\sqrt{58}$$ です。

$$\sqrt{59} \to \frac{23+2\sqrt{59}}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{60} \to \frac{8+\sqrt{60}}{2} = 4+\sqrt{15}$$

$$\sqrt{61} \to \frac{39+5\sqrt{61}}{2} \qquad \sqrt{62} \to \frac{8+\sqrt{62}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}+\sqrt{31}$$

$\sqrt{63} \to \dfrac{7+\sqrt{63}}{\sqrt{14}} = \dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{66} \to \dfrac{8+\sqrt{66}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}+\sqrt{33}$

$\sqrt{67} \to \dfrac{221+27\sqrt{67}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{68} \to \dfrac{8+\sqrt{68}}{2} = 4+\sqrt{17}$

$\sqrt{69} \to \dfrac{25+3\sqrt{65}}{2}$　　$\sqrt{69} \to \dfrac{108+13\sqrt{69}}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{70} \to \dfrac{25+3\sqrt{70}}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}+3\sqrt{14}$　　$\sqrt{71} \to \dfrac{59+7\sqrt{71}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{72} \to \dfrac{8+\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = 3+2\sqrt{2}$

$\sqrt{73}$ は、循環節の長さが 7 なので第 3,4 項により、

$$\sqrt{73} \to \left(\frac{17+2\sqrt{73}}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{94+11\sqrt{73}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3204+375\sqrt{73}}{3} = 1068+125\sqrt{73}$$ **です。**

$\sqrt{74}$ は、循環節の長さが 5 なので第 2,3 項により、

$$\sqrt{74} \to \left(\frac{9+\sqrt{74}}{\sqrt{7}}\right)\left(\frac{17+2\sqrt{74}}{\sqrt{7}}\right) = \frac{301+35\sqrt{74}}{7} = 43+5\sqrt{74}$$ **です。**

$\sqrt{75} \to \dfrac{9+\sqrt{75}}{\sqrt{6}} = \dfrac{5+3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{76} \to \dfrac{340+39\sqrt{76}}{2} = 170+39\sqrt{19}$

$\sqrt{76} \to \dfrac{26+3\sqrt{76}}{\sqrt{8}} = \dfrac{13+3\sqrt{19}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{77} \to \dfrac{9+\sqrt{77}}{2}$

$\sqrt{77} \to \dfrac{35+4\sqrt{77}}{\sqrt{7}} = 5\sqrt{7}+4\sqrt{11}$　　$\sqrt{78} \to \dfrac{9+\sqrt{78}}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{79} \to \dfrac{9+\sqrt{79}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{80} \to \dfrac{8+\sqrt{80}}{4} = 2+\sqrt{5}$

$\sqrt{83} \to \dfrac{9+\sqrt{83}}{\sqrt{2}}$　　$\sqrt{84} \to \dfrac{9+\sqrt{84}}{\sqrt{3}}$　　$\sqrt{85} \to \dfrac{9+\sqrt{85}}{2}$

$\sqrt{86} \to \dfrac{102+11\sqrt{86}}{\sqrt{2}} = 51\sqrt{2}+11\sqrt{43}$　　$\sqrt{87} \to \dfrac{9+\sqrt{87}}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{29}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{88} \to \dfrac{28+3\sqrt{88}}{\sqrt{8}} = 7\sqrt{2}+3\sqrt{11}$

$\sqrt{89}$ は、循環節の長さが 5 なので第 2,3 項により、

$$\sqrt{89} \to \left(\frac{19+2\sqrt{89}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{66+7\sqrt{89}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2500+265\sqrt{89}}{5} = 500+53\sqrt{89}$$

$$\sqrt{90} \to \frac{9+\sqrt{90}}{3} = 3+\sqrt{10} \qquad \sqrt{91} \to \frac{105+11\sqrt{91}}{\sqrt{14}}$$

$$\sqrt{92} \to \frac{48+5\sqrt{92}}{2} \qquad \sqrt{92} \to \frac{10+\sqrt{92}}{\sqrt{8}} = \frac{5+\sqrt{23}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{93} \to \frac{29+3\sqrt{93}}{2} \qquad \sqrt{93} \to \frac{135+14\sqrt{93}}{\sqrt{3}} = 45\sqrt{3}+14\sqrt{31}$$

$$\sqrt{94} \to \frac{1464+151\sqrt{94}}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{95} \to \frac{10+\sqrt{95}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}+\sqrt{19}$$

$$\sqrt{96} \to \frac{10+\sqrt{96}}{2} = 5+2\sqrt{6}$$

$\sqrt{97}$ **は、循環節の長さが 11 なので第 5,6 項により、**

$$\sqrt{97} \to \left(\frac{128+13\sqrt{97}}{3}\right)\left(\frac{197+20\sqrt{97}}{3}\right) = \frac{50436+5121\sqrt{97}}{9} = 5604+569\sqrt{97}$$

$$\sqrt{98} \to \frac{10+\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = 7+5\sqrt{2} \qquad \sqrt{99} \to \frac{9+\sqrt{99}}{\sqrt{18}} = \frac{3+\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

参考文献

高木貞治：初等整数論講義